

18.03.2020

Temat: Mnożenie wyrażeń wymiernych.

Wyrażeniem wymiernym nazywamy wyrażenie zapisywane w postaci ilorazu dwóch wielomianów, np.:

$$\frac{6x^2+4}{2}, \quad \frac{7}{x}, \quad \frac{x}{x^2-1}, \quad \frac{6x^3+2x^2}{x^2-x+1}, \quad \frac{4x^4-1}{x^{100}+1}$$

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny.

Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{3x^2-7x}$.

$3x^2 - 7x = 0$ dla $x = 0$ oraz dla $x = \frac{7}{3}$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{7}{3}\}$.

Przy określaniu dziedziny wyrażeń wymiernych należy mianownik przyrównać do zera. Wyznaczamy miejsca zerowe mianownika i zapisujemy wynik dziedziny jako

$D = \mathbf{R} - \{\text{miejsca zerowe mianownika}\}$

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartość dla $x = -1$.

a) $\frac{3x^5+2x^3+x}{x^2-9}$

c) $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$

e) $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$

b) $\frac{6x^2+3x-7}{4x^2-25}$

d) $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$

f) $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(\cancel{x-2})}{(x+2)(\cancel{x-2})} = \frac{x^2}{x+2}$$

Skracać możemy tylko przy postaci iloczynowej, a zatem licznik i mianownik rozkładamy na postać iloczynową stosując wzory skróconego mnożenia oraz postaci iloczynowej funkcji kwadratowej, wielomianów.

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2-9}{3-x}$

c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$

e) $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$

g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$

d) $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$

f) $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$

h) $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$

h)

$$\frac{x^2+4x+4}{x^4-16} = \frac{(x+2)(x+2)}{(x^2+4)(x^2-4)} = \frac{(x+2)(x+2)}{(x^2+4)(x-2)(x+2)} = \frac{x+2}{(x^2+4)(x-2)}$$

$D: x^4-16=0$ korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia

$(x^2+4)(x^2-4)=0$ każdy z czynników przyrównujemy do zera

$$x^2+4=0 \quad x^2-4=0$$

$x^2=-4$ brak rozwiązań bo kwadrat nie może być ujemny $x^2=4$ pierwiastkujemy $x=-2$ lub $x=2$

$$D = R - \{-2, 2\}$$

e)

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^3} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^3(x-1)} = \frac{x+1}{x^3}$$

$D: x^4-x^3=0$ wyłączamy najniższą potęgę przed nawias

$$x^3(x-1)=0$$

$x^3=0$ pierwiastkujemy pierwiastkiem trzeciego stopnia $x-1=0$

$$x=0 \quad x=1$$

$$D = R - \{0, 1\}$$

Proszę o przeanalizowanie wykonanych przykładów i wykonanie pozostałych przykładów.

Ćwiczenie 3

Wykonaj mnożenie, odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6}$

c) $\frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2}$

e) $\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4}$

b) $\frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9}$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0,5x+1}{9-3x}$

f) $\frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$

f)

Przedstawiamy licznik i mianownik w postaci iloczynowej wyłączając czynnik poza nawias, stosując wzory skróconego mnożenia i postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$$\frac{3x^2 - x^3}{2x - 6} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^2} = \frac{-x^2(-3 + x)}{2(x - 3)} \cdot \frac{(x + 1)(x + 1)}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{-x^2(-3 + x)}{2(x - 3)} \cdot \frac{(x + 1)(x + 1)}{x^2(x - 1)(x + 1)} = \frac{-(x + 1)}{2(x - 1)} = \frac{-x - 1}{2(x - 1)}$$

D :

$$2x - 6 = 0 \quad x^4 - x^2 = 0$$

$$2x = 6 : 2 \quad x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 3 \quad x^2 = 0 \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 = 1/\sqrt{}$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 1$$

$$D = \mathbb{R} - \{3, 0, -1, 1\}$$

Proszę przeanalizować przykład i wykonać pozostałe przykłady.