Temat : Nierówności wymierne

Każdą nierówność wymierną będziemy tak przekształcać aby po jednej stronie nierówności był tylko jeden ułamek a po drugiej stronie zero. Wówczas zamieniamy nierówność wymierną na postać iloczynową mnożąc licznik przez mianownik, otrzymując nierówność wielomianową w postaci iloczynowej. Z postaci iloczynowej wyznaczamy miejsca zerowe przyrównując wyrażenia w nawiasach do zera. Wyznaczone miejsca zerowe zaznaczamy na osi liczbowej i szkicujemy wężyk. W punktach wyrzuconych z dziedziny stawiamy kółeczko niezamalowane, w pozostałych miejscach zerowych kółeczka zgodnie z znakiem nierówności. Z wykresu odczytujemy rozwiązanie.

$$\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$$

$D = R - \{3\}$

$$\frac{2x-5}{x-3} - 3 \leq 0$$

$$\frac{2x-5}{x-3} - \frac{3(x-3)}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{2x-5-3(x-3)}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{2x-5-3x+9}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{-x+4}{x-3} \leq 0$$

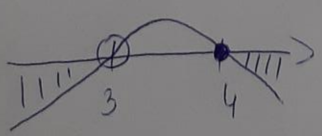
„−" · „+" daje minus → wężyk od dołu

$$(-x+4)(x-3) \leq 0$$

$-x+4=0$ $\quad$ $x-3=0$

$-x=-4$ $\quad$ $x=3 \notin D$

$x=4 \in D$



w 4 kółko zamalowane bo nierówność słaba (≤)

w 3 kółko niezamalowane bo nie należy do dziedziny.

$x \in (-\infty; 3) \cup \langle 4, \infty)$

Zadanie 1.

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{x-2} \geqslant 1$

b) $\frac{2x+7}{x-4} > 3$

c) $\frac{2}{4-x} < 3$

d) $\frac{4x-7}{x-2} \leqslant 5$

Powinniście otrzymać rozwiązania:

a) $x \neq 2$, $(5-x)(x-2) \geqslant 0$,
$x \in (2; 5\rangle$

b) $x \neq 4$, $(x-4)(-x+19) > 0$,
$x \in (4; 19)$

c) $x \neq 4$, $(4-x)(3x-10) < 0$,
$x \in \left(-\infty; 3\frac{1}{3}\right) \cup (4; \infty)$

d) $x \neq 2$, $(3-x)(x-2) \leqslant 0$,
$x \in (-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$

Zadanie 2.

Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

a) $\frac{x-3}{x-4} \leqslant \frac{x-1}{x-3}$

b) $\frac{x+3}{x+2} \geqslant \frac{x+3}{2x+7}$

c) $\frac{4-2x}{x+1} > \frac{1-x}{x}$

d) $\frac{x+3}{1-x} < \frac{5-x}{x+2}$

e) $\frac{4-x}{2x-2} \geqslant \frac{x-3}{1-2x}$

f) $\frac{4x+2}{2x-6} \leqslant \frac{2x+2}{2x+3}$

Rozwiązanie podpunktu c poniżej

c) $\frac{4-2x}{x+1} > \frac{1-x}{x}$ $\quad D = R - \{-1, 0\}$

$\frac{4-2x}{x+1} - \frac{1-x}{x} > 0$ do wspólnego mianownika

$\frac{(4-2x)\cdot x}{(x+1)\cdot x} - \frac{(1-x)(x+1)}{x} > 0$

$\frac{4x-2x^2-(\cancel{x}+1-x^2-\cancel{x})}{x(x+1)} > 0$

$\frac{4x-2x^2-1+x^2}{x(x+1)} > 0$

$\frac{-x^2+4x-1}{x(x+1)} > 0$ na postać iloczynową

„$-$" $\cdot$ „$+$" $\cdot$ „$+$" $=$ „$-$" wężyk od dołu

$(-x^2+4x-1)\,x\,(x+1) > 0$

$-x^2+4x-1=0 \qquad x=0 \qquad x+1=0$

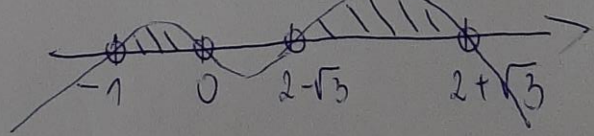
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x=-1$

$\Delta = 4^2-4\cdot(-1)\cdot(-1) =$

$= 16-4 = 12$

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{12}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4-2\sqrt{3}}{-2} = \frac{-2(2+\sqrt{3})}{-2} = 2+\sqrt{3}$

$x_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2\cdot(-1)} = 2-\sqrt{3}$



Wszystkie kółka otwarte bo ostry znak nierówności $\quad x \in (-1, 0) \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

Proszę o wykonanie wszystkich przykładów z obu zadań

Powinniście otrzymać rozwiązania

a) $x \in (3; 4) \cup \langle 5; \infty)$

b) $x \in (-\infty; -5\rangle \cup (-\frac{7}{2}; -3\rangle \cup (-2; \infty)$

c) $x \in (-1; 0) \cup (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$

d) $x \in (-2; -\frac{1}{11}) \cup (1; \infty)$

e) $x \in \langle -2; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$

f) $x \in \langle -3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}) \cup \langle -3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}; 3)$